XXI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

районный тур, решения

2013

2 декабря

9 класс

1. В некоторый момент Юпитер наблюдается в созвездии Козерога. В каком созвездии он будет наблюдаться ровно через один земной год?

Решение:

Так как Юпитер движется по своей орбите, а Земля по своей, то при наблюдении Юпитера с Земли мы будем наблюдать сложное движение Юпитера относительно движущейся Земли. Земля, сделав за год один оборот вокруг Солнца, вернется в ту же точку орбиты, т.е. мы будем смотреть на Юпитер из той же точки пространства, что и год назад. Необходимо выяснить, на какое угловое расстояние переместится Юпитер за этот год по своей орбите. Применим 3-й закон Кеплера $T^2/a^3 = 1$ (где T измеряется в годах, а a – в астрономических единицах. Если $T_\oplus = 1$ год, а $a_\oplus = 1$ а.е., то и отношение $T_\oplus^2/a_\oplus^3 = 1$). Зная, что $a_{\text{Юп}} = 5$ а.е., получаем, что $T_{\text{Юп}} = 12$ лет. Юпитер движется по орбите в том же направлении, что и Солнце при наблюдении с Земли, т.е. он проходит те же зодиакальные созвездия. За 1 год Юпитер пройдет 1/12 часть своей орбиты и, значит, перейдет в следующее зодиакальное созвездие. Следующее зодиакальное созвездие после Козерога — Водолей. Т.е. через год Юпитер будет наблюдаться в созвездии Водолея.

2. Куда прилетит самолет, который будет все время лететь на северо-запад? Во сколько раз его путь будет длиннее, чем кратчайший маршрут туда же?

Решение:

Для ответа на первый вопрос заметим (это несложно), что в результате перемещения самолет все время будет оказываться севернее и западнее исходной точки. Соответственно, самолет будет двигаться до тех пор, пока сможет перемещаться на запад и на север. Перемещаться на запад можно бесконечно долго (двигаясь при этом вокруг Земли), а вот перемещение на север в конечном счете приведет к тому, что самолет окажется на северном полюсе Земли. Дальнейшее движение станет невозможным — все направления от северного полюса ведут на юг. Таким образом, самолет прилетит на северный полюс.

Для ответа на второй вопрос рассмотрим на поверхности Земли небольшой квадрат (в этом случае кривизной поверхности можно пренебречь), стороны которого ориентированы точно по сторонам света. Самолет, движущийся из юго-восточной вершины квадрата на северо-запад, пересечет квадрат по диагонали, которая длиннее одной стороны квадрата в $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ раз. Поэтому, если разбить траекторию движения самолета на северный полюс на небольшие отрезки, то для каждого такого отрезка расстояние, которое пролетает самолет, будет в $\sqrt{2}$ раз больше, чем расстояние, которое нужно было бы пролететь при движении к полюсу по кратчайшему пути. Соответственно, и общий путь самолета будет в $\sqrt{2} \approx 1.4$ раз длиннее, чем кратчайший маршрут на полюс.

3. В некоторый момент лучевая скорость Венеры при наблюдении с Земли стала равна нулю. Оцените величину лучевой скорости Венеры ровно через один земной год. Радиус орбиты Венеры равен 0.7 а.е.

Решение:

Лучевая скорость — это проекция полной относительной скорости на луч зрения, т.е. на линию, соединяющую две планеты. Очевидно, что лучевая скорость Венеры станет равной нулю в моменты верхнего и нижнего соединения, когда вектора полных скоростей планет параллельны.

Ровно через год Земля окажется в той же точке своей орбиты, а Венера за то же время переместится в другую точку, так как период ее обращения вокруг Солнца меньше периода обращения Земли. Из III закона Кеплера ($T = a^{3/2}$) следует, что период Венеры равен $0.7^{3/2} \approx 0.6$ года. За один земной год Венера сделает примерно 1.7 оборота вокруг Солнца. Это соответствует дуге орбиты примерно в $360° + 250°$. Угол, соответствующий одному полному обороту (360°) пропускаем (Венера вернется в ту же точку орбиты), и рассматриваем оставшуюся часть в 250°.

Сделаем рисунки, здесь они являются необходимой частью решения. Рисунок 1 сделан для случая верхнего соединения, рисунок 2 — нижнего.

В обоих случаях лучевая скорость Венеры через год будет равна $u = u_\text{В} - u_\text{З}$ — разности проекций орбитальной скорости Венеры $v_\text{В}$ и орбитальной скорости Земли $v_\text{З}$ на луч зрения. $u_\text{В} = v_\text{В} \cos a$, $u_\text{З} = v_\text{З} \cos b$. Известно, что орбитальная скорость Земли $v_\text{З} = 30\,\text{км/с}$ (при необходимости ее можно сосчитать, зная расстояние от Земли до Солнца $r = 1.5 \cdot 10^8$ км и продолжительность года $t = 3 \cdot 10^7$ с: $v = 2\pi r/t$). Так как радиус орбиты Венеры равен 0.7 радиуса орбиты Земли, а год — 0.6 земного, то орбитальная скорость Венеры равна

$$v_\text{В} = \frac{0.7}{0.6} v_\text{З} = \frac{0.7 \cdot 30}{0.6} = 35\,\text{км/с}.$$

Теперь нужно найти углы a и b, точнее их косинусы.

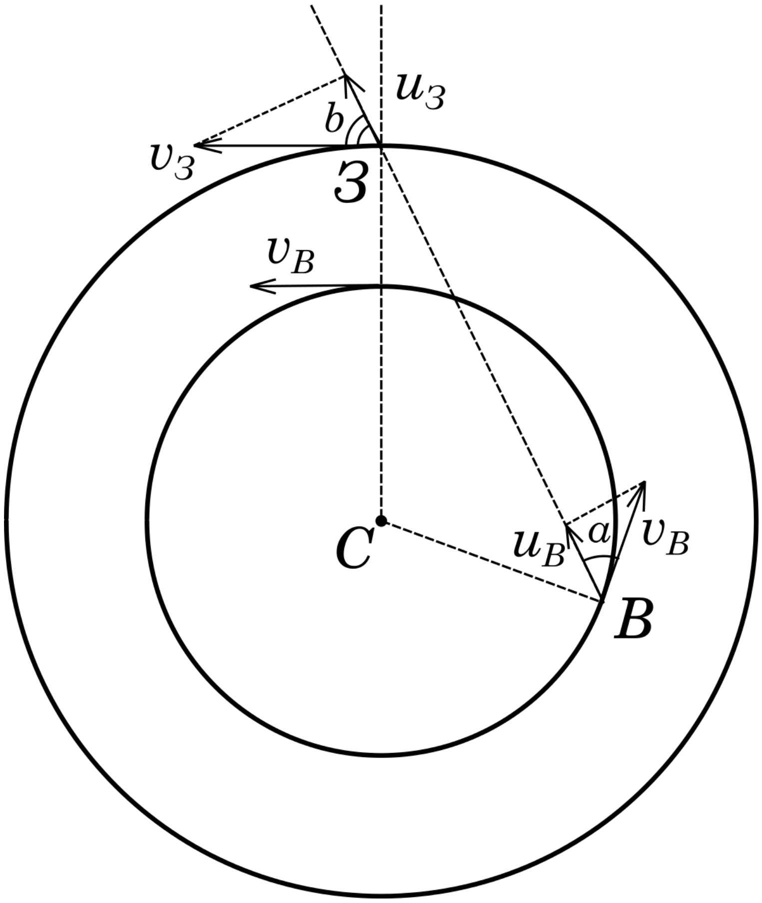

Рис. 1

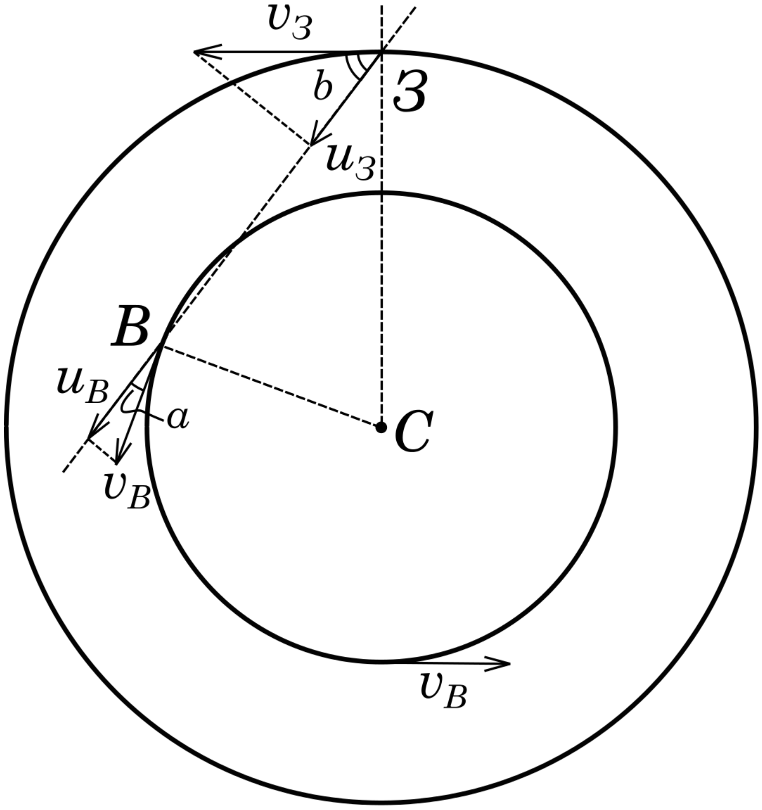

Рис. 2

Удобнее и проще всего найти их графически — из рисунков. Для этого нужно:

1. нарисовать орбиты планет в масштабе, т.е. так, чтобы радиусы окружностей соотносились как 1:0.7;
2. отмерить угол, на который повернет Венера, и отметить ее положение на орбите через год;

3. изобразить лучевые скорости планет в виде отрезков единичной длины;
4. построить проекции этих отрезков на луч зрения;
5. измерить длины этих проекций: это и будут косинусы соответствующих углов.

Останется домножить косинусы этих углов на соответствующие орбитальные скорости и окончательно вычислить лучевую скорость Венеры. При этом легко можно получить ответ с точностью до одной значащей цифры, что, в принципе, и требуется.

Другой способ нахождения косинусов нужных углов состоит в решении треугольников.

Рассмотрим $\triangle$ЗСВ (Земля – Солнце – Венера). Из рисунка видно, что $\angle \mathrm{В} = 90^\circ - a$, а $\angle \mathrm{З} = 90^\circ - b$. Следовательно, $\cos a = \sin \mathrm{В}$, а $\cos b = \sin \mathrm{З}$. В $\triangle$ЗСВ известны стороны треугольника ЗС = 1 а.е и СВ = 0.7 а.е. Также известен угол С с вершиной при Солнце. Так как нам нужно найти синусы двух оставшихся углов, то удобно воспользоваться теоремой синусов для $\triangle$ЗСВ. Но для этого необходимо найти третью сторону ВЗ с помощью теоремы косинусов.

Рассмотрим случай верхнего соединения. Для него $\angle \mathrm{С} = 360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$.

$$\mathrm{ВЗ}^2 = \mathrm{ЗС}^2 + \mathrm{СВ}^2 - 2 \cdot \mathrm{ЗС} \cdot \mathrm{СВ} \cdot \cos \mathrm{С} = 1 + 0.7^2 - 2 \cdot 0.7 \cos 110^\circ \approx$$
$$\approx 1.5 + 1.4 \sin 20^\circ \approx 1.5 + \frac{1.4}{3} \approx 2,$$

откуда $\mathrm{ВЗ} = \sqrt{2} \approx 1.4$ а.е.

$$\sin \mathrm{С} = \sin 110^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 110^\circ} \approx \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{9} \approx 0.95.$$

Теперь с помощью теоремы синусов находим косинусы нужных углов:

$$\cos a = \sin \mathrm{В} = \sin \mathrm{С} \frac{\mathrm{ЗС}}{\mathrm{ВЗ}} = 0.95 \frac{1}{1.4} \approx 0.7;$$

$$\cos b = \sin \mathrm{З} = \sin \mathrm{С} \frac{\mathrm{СВ}}{\mathrm{ВЗ}} = 0.95 \frac{0.7}{1.4} \approx 0.5.$$

Отсюда окончательно находим лучевую скорость Венеры:

$$u = u_{\mathrm{В}} - u_{\mathrm{З}} = v_{\mathrm{В}} \cos a - v_{\mathrm{З}} \cos b \approx 35 \cdot 0.7 - 30 \cdot 0.5 \approx 10\,\text{км/с}.$$

Рассмотрим случай нижнего соединения. Для него $\angle \mathrm{С} = 250^\circ - 180^\circ = 70^\circ$. Стоит отметить, что $\sin 70^\circ = \sin 180^\circ - 110^\circ = \sin 110^\circ \approx 0.95$, $\cos 70^\circ =$

$-\cos 110^\circ \approx 1/3$. Из рисунка видно, что в данном случае ВЗ $\approx$ ЗС. Действительно,

$$\text{ВЗ}^2 == 1 + 0.7^2 - 2 \cdot 0.7 \cos 70^\circ \approx 1.5 - \frac{1.4}{3} \approx 1,$$

откуда ВЗ $= \sqrt{1} = 1$ а.е.

Следовательно, $\angle \text{В} \approx \angle \text{С} = 70^\circ$

Теперь находим косинусы нужных углов:

$$\cos a = \sin \text{В} = \sin \text{С} \approx 0.95.$$

$$\cos b = \sin \text{З} = \sin \text{С} \frac{\text{СВ}}{\text{ВЗ}} = 0.95 \frac{0.7}{1} \approx 0.7.$$

Отсюда окончательно находим лучевую скорость Венеры:

$$u = u_\text{В} - u_\text{З} = v_\text{В} \cos a - v_\text{З} \cos b \approx 35 \cdot 0.95 - 30 \cdot 0.7 \approx 13\,\text{км/с}.$$

4. В будущем человечество решило отправить сигнал в планетную систему звезды Барнарда, используя для этого мощный лазер, пучок излучения которого практически не расширяется. Под каким углом к направлению на звезду Барнарда на небе нужно послать сигнал, чтобы он дошел до места назначения? Собственное движение звезды Барнарда равно $10''$/год, расстояние до нее — 6 световых лет.

Решение:

Так как до звезды 6 световых лет, то на небе мы видим звезду там, где она находилась 6 лет назад. Сигнал до звезды также будет идти 6 лет, поэтому надо выяснить, на какой угол звезда Барнарда переместится на небесной сфере за 12 лет. Собственное движение звезды — это угловая скорость ее движения по небесной сфере, поэтому перемещение за 12 лет составит $10''/\text{ год} \cdot 12 \text{ лет} = 120'' = 2'$.

Заметим, что положение звезды на небесной сфере определяется не только ее перемещением в пространстве, но и временем года, когда она наблюдается. Из-за наблюдения ее с разных точек земной орбиты (эффекта годичного параллакса) звезда Барнарда смещается от среднего положения на $0''.5$ в обе стороны, а за счет движения наблюдателя вместе с Землей вокруг Солнца (эффекта годичной аберрации) — на $20''$. Однако оба этих эффекта, особенно годичный параллакс, малы по сравнению с собственным движением.

5. В галактике Большое Магелланово облако (БМО) содержится 10^{10} звезд. Известно, что БМО имеет видимую звездную величину, равную $+1^m$. Чему равна в среднем видимая звездная величина одной звезды в БМО?

Решение:

Все звезды БМО создают при наблюдении с Земли освещенность, в 10^{10} раз большую, чем одна звезда. Из определения видимой звездной величины известно, что если освещенность от некоторого первого объекта в 100 раз меньше, чем освещенность от второго, то видимая звездная величина первого объекта на 5^m больше, чем второго. Так как $10^{10} = 100^5$, то одна звезда БМО имеет видимую звездную величину $+1^m + 5 \cdot 5^m = +26^m$.